Graphes équilibrés sous-cubiques

JGA2013-LRI

Théophile Trunck

LIP (ENS Lyon) - MIMUW (Varsovie)

Novembre 2013

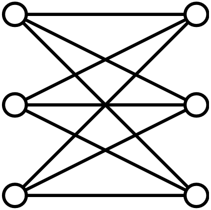
Coauteurs

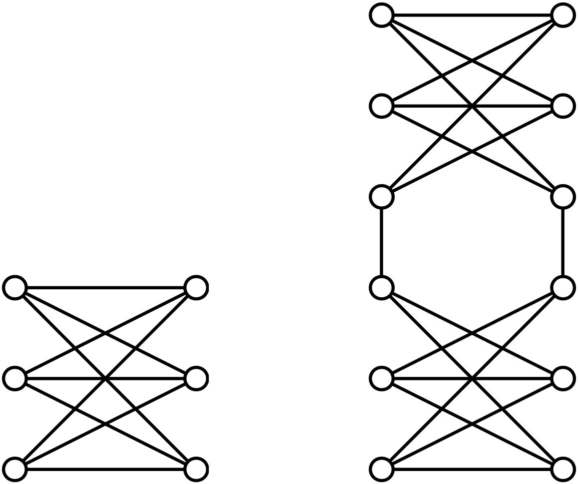
- Pierre Aboulker, Concordia University
- Marko Radovanović, University of Belgrade
- Nicolas Trotignon, CNRS, LIP, Lyon
- Kristina Vušković, Leeds University

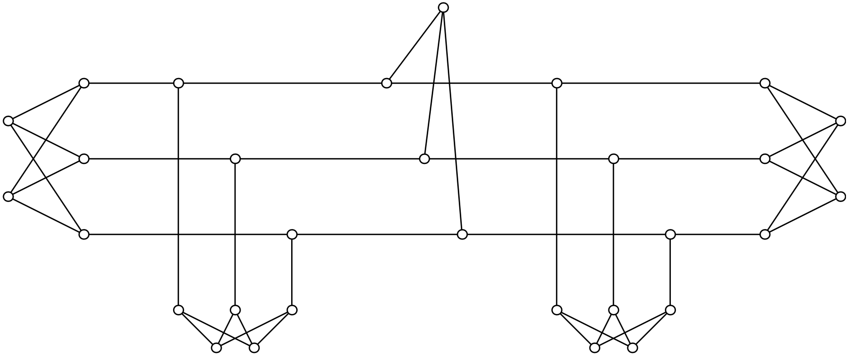
Motivation

Conjecture (Morris, Spiga and Webb)

Soit G un graphe cubique, si tous les cycles induits ont une longueur divisible par 4, alors G a une paire de jumeaux.







Définitions

Définition

Un graphe est dit *équilibré*, si chaque cycle induit a une taille divisible par 4.

Définition

Un graphe est dit *équilibrable*, si l'on peut affecter à chaque arête un poids ± 1 de sorte que le poids de chaque cycle induit soit divisible par 4.

R_{10}

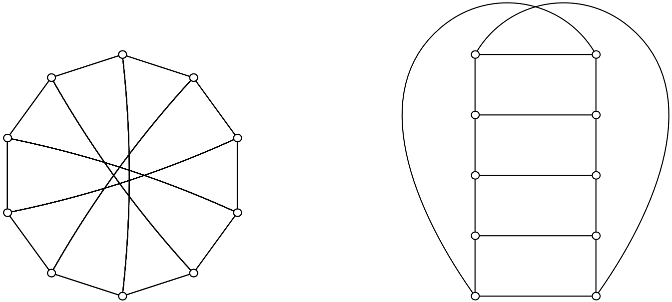


Figure: R_{10}

Résultat principal

Théorème

Soit G un graphe 2-connexe équilibrable avec $\Delta(G) \leq 3$. Si G n'est pas R_{10} et a au moins 3 sommets de degré 3 alors il vérifie une de ces conditions :

- *G a 2 sommets de degré 2 dans des branches non-incidentes.*
- *G a une paire de jumeaux et un sommet de degré 2.*
- *G a deux paires distinctes de jumeaux.*

Corollaire

Soit G un graphe cubique, si tous les cycles induits ont une longueur divisible par 4, alors G a une paire de jumeaux.

Décomposition

Théorème (Conforti, Cornuéjols, Kappor and Vušković + Conforti and Rao + Yannakakis + lemmes faciles)

Soit G différent de R_{10} un graphe connexe équilibrable avec $\Delta(G) \leq 3$. Alors G est basique ou contient un 2-joint, 6-joint ou un star-cutset.

Définition

Un graphe est *basique* s'il est biparti avec seulement des sommets de degré au plus 2 d'un coté de la bipartition.

Basique

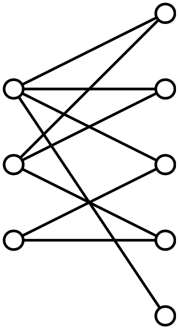


Figure: Basique

2-joint

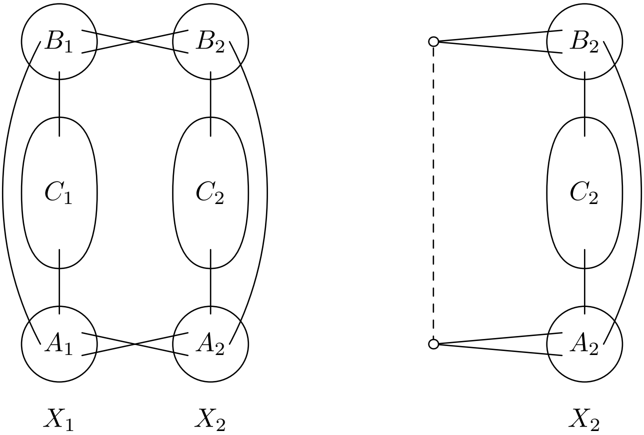


Figure: 2-joint

6-joint

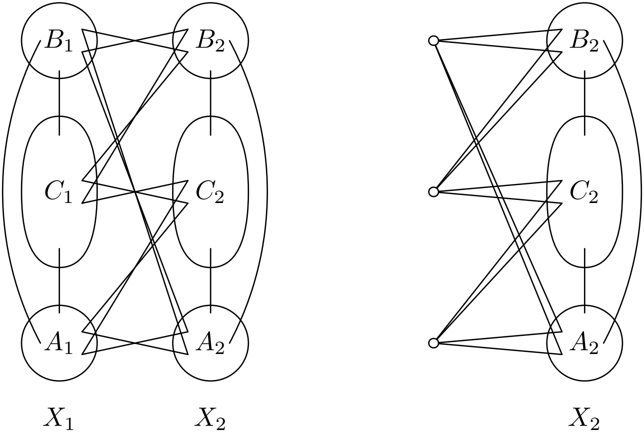


Figure: 6-joint

Star-cutset

Définition

Un *star-cutset* dans un graphe G est un ensemble S de sommets tels que :

- $G \setminus S$ n'est pas connexe.
- S contient un sommet v adjacent à tous les autres sommets de S.

Plan de la preuve

Rappel : On veut des jumeaux et/ou des sommets de degré 2 éloignés.

- On a un théorème de décomposition : le graphe est basique ou contient un cutset particulier.
- Traiter les 6-joint et star-cutset par induction classique.

Plan de la preuve

Rappel : On veut des jumeaux et/ou des sommets de degré 2 éloignés.

- On a un théorème de décomposition : le graphe est basique ou contient un cutset particulier.
- Traiter les 6-joint et star-cutset par induction classique.
- Vérifier que la classe sans 6-joint ni star-cutset est stable par 2-joint.
- Dans cette classe on a des 2-joint extrêmes (un coté de la décomposition est basique).
- Utiliser ces informations supplémentaires pour finir la preuve.

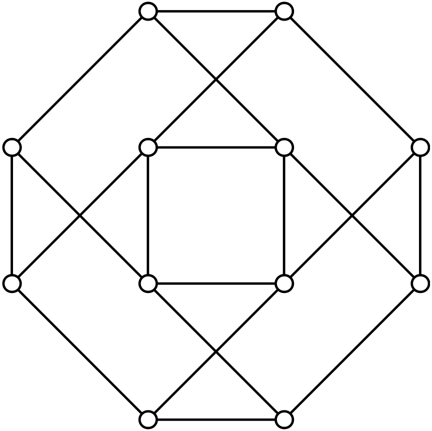
Sans Star-cutset

Théorème

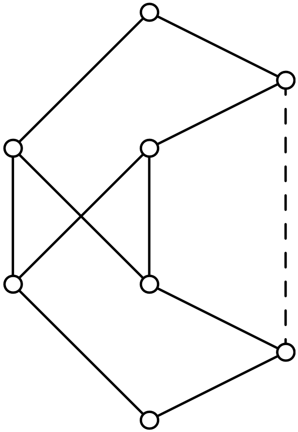
Soit G un graphe biparti sans star-cutset et (X_1, X_2) un 2-joint. En notant G_1, G_2 les blocs on a :

- *Si G est équilibrable, alors G_1, G_2 aussi.*
- *G_1, G_2 n'ont pas de star-cutset.*
- *Si G n'a pas de 6-joint, alors G_1, G_2 n'ont pas de 6-joint.*
- *Si X_1 est minimal alors G_1 n'a pas de 2-joint.*

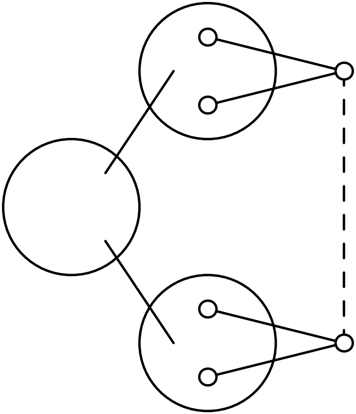
Croisement de 2-joint



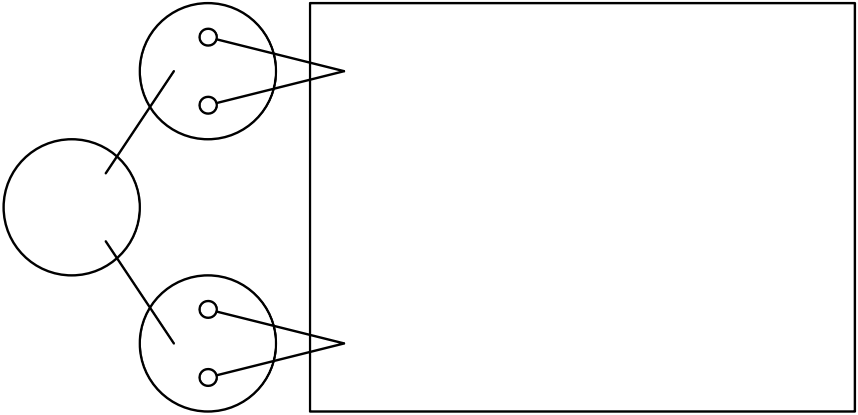
Croisement de 2-joint



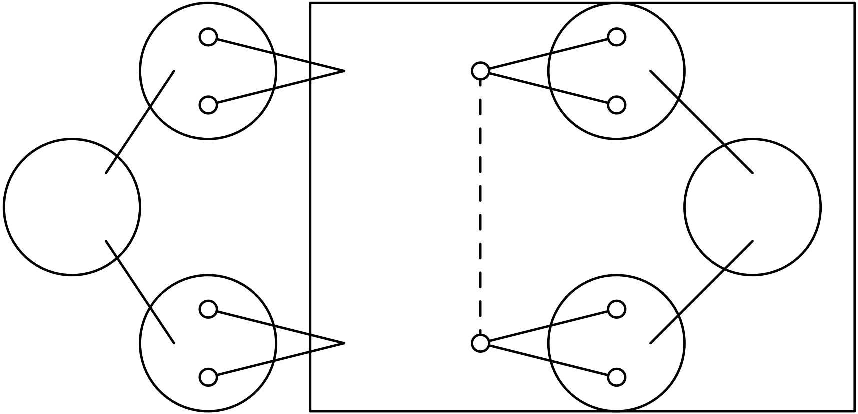
2-joint minimal



Utilisation du 2-joint



Utilisation du 2-joint



Problèmes ouverts

Question

Comment construire des graphes cubiques équilibrés ?

Conjecture (Conforti, Cornuéjols and Vušković)

Soit G un graphe équilibrable qui n'est pas R_{10}, alors il y a toujours une arête qui n'est pas l'unique corde d'un cycle.

Merci de votre attention.