Mineurs induits et bel ordre

Séminaire du LIMOS

Jarosław Błasiok, Marcin Kamiński, Jean-Florent Raymond et Théophile Trunck

Mars 2014

UNIWERSYTET WARSZAWSKI

ENS DE LYON

Définitions

- Ordre (Partiel) : **réflexif** + **antisymétrique** + **transitif** ;

Définitions

- Ordre (Partiel) : **réflexif** + **antisymétrique** + **transitif** ;
  - $(\mathbb{N}, \leqslant)$;
  - $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$;
  - Beaucoup de relations d'inclusions sur les graphes.

Définitions

- Ordre (Partiel) : **réflexif** + **antisymétrique** + **transitif** ;
  - $(\mathbb{N}, \leqslant)$;
  - $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$;
  - Beaucoup de relations d'inclusions sur les graphes.
- antichaine : suite d'éléments **non-comparables** ;

Définitions

- Ordre (Partiel) : **réflexif** + **antisymétrique** + **transitif** ;
  - $(\mathbb{N}, \leqslant)$;
  - $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$;
  - Beaucoup de relations d'inclusions sur les graphes.
- antichaine : suite d'éléments **non-comparables** ;
  - $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots$;
- well-quasi-order (wqo) : ordre partiel **sans antichaine infinie** ni de suite infiniement décroissante ;

Définitions

- Ordre (Partiel) : **réflexif + antisymétrique + transitif** ;
  - $(\mathbb{N}, \leqslant)$;
  - $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$;
  - Beaucoup de relations d'inclusions sur les graphes.
- antichaine : suite d'éléments **non-comparables** ;
  - $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots$;
- well-quasi-order (wqo) : ordre partiel **sans antichaine infinie** ni de suite infiniement décroissante ;
  - tous les ordres totaux bien fondés $(\mathbb{N}, \leqslant)$;
  - $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ n'est pas wqo ;
  - certaines relations d'inclusion sur les graphes.

Inclusion sur les graphes

	suppression de sommets	suppression d'arêtes	contraction d'arêtes
sous-graphe $\leqslant_s$	✓	✓	
sous-graphe induit $\leqslant_{s.i}$	✓		
mineur $\leqslant_m$	✓	✓	✓
mineur induit $\leqslant_{m.i}$	✓		✓
contraction $\leqslant_c$			✓

Classes closes et obstructions

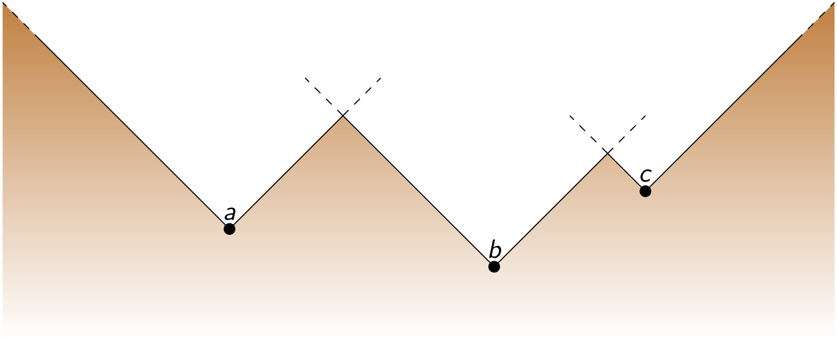
$(S, \leqslant)$ un ordre partiel

- $P \subseteq S$ est une $\leqslant$-classe close si pour tout $x \in P$ alors pour tout $y \leqslant x$, $y \in P$.
    - graphes planaires pour $\leqslant_m$, $\omega < k$ pour $\leqslant_{s.i}$, $\gamma < k$ pour $\leqslant_c$

Classes closes et obstructions

$(S, \leqslant)$ un ordre partiel

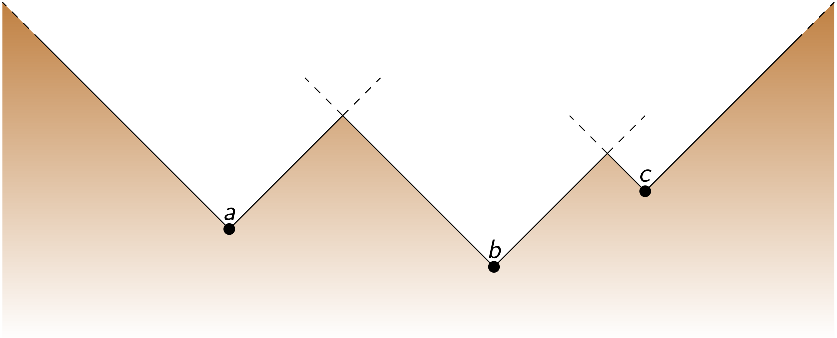
- $P \subseteq S$ est une $\leqslant$-classe close si pour tout $x \in P$ alors pour tout $y \leqslant x$, $y \in P$.
  - graphes planaires pour $\leqslant_m$, $\omega < k$ pour $\leqslant_{s.i}$, $\gamma < k$ pour $\leqslant_c$



Classes closes et obstructions

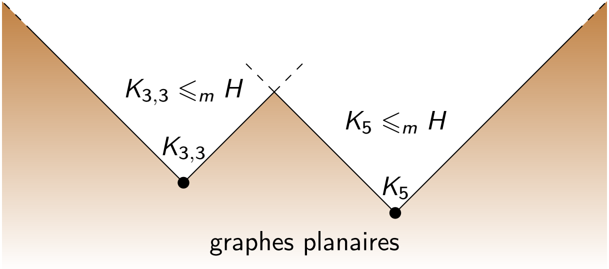
$(S, \leqslant)$ un ordre partiel

- $P \subseteq S$ est une $\leqslant$-classe close si pour tout $x \in P$ alors pour tout $y \leqslant x$, $y \in P$.
  - graphes planaires pour $\leqslant_m$, $\omega < k$ pour $\leqslant_{s.i}$, $\gamma < k$ pour $\leqslant_c$



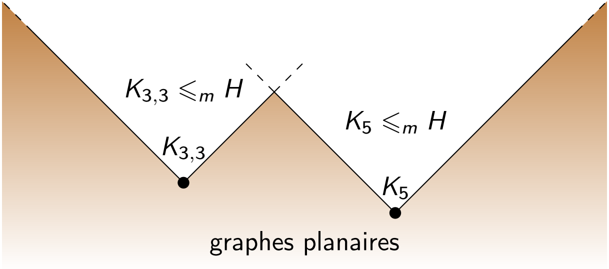
- $X \subseteq S$ obstruction de P : $x \notin P \Leftrightarrow \exists y \in X, y \leqslant x$ (caractérisation par sous-graphe interdit)

Ensemble fini d'obstructions



Intérêt des wqos : Les ensembles d'obstructions pour les propriétés $\leqslant$-closes sont **finis**.

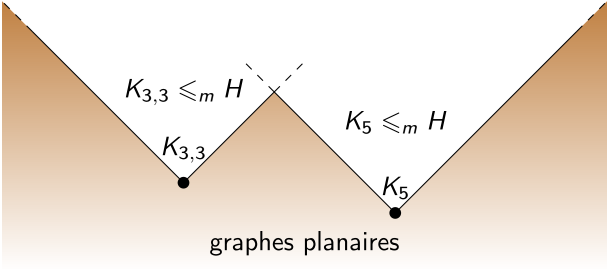
Ensemble fini d'obstructions



Intérêt des wqos : Les ensembles d'obstructions pour les propriétés $\leqslant$-closes sont **finis**.

Conséquence : vérifier $x \leqslant y$ efficacement $\Rightarrow$ décider P efficacement.

Ensemble fini d'obstructions



Intérêt des wqos : Les ensembles d'obstructions pour les propriétés $\leqslant$-closes sont **finis**.

Conséquence : vérifier $x \leqslant y$ efficacement $\Rightarrow$ décider P efficacement.

$\rightarrow$ **But :** Prouver que certaines relations d'inclusions de graphes sont des wqos.

Propriétés des wqos

(rappel : wqo $\equiv$ pas de suite infinie d'éléments non-comparable)

Remarque (Sous-ensemble d'un wqo)

Si $(S, \leqslant)$ est un wqo et $U \subseteq S$ alors $(U, \leqslant)$ est un wqo.

Remarque (Union de wqo)

Si $(A, \leqslant)$ et $(B, \leqslant)$ sont des wqos, alors $(A \cup B, \leqslant)$ est un wqo.

Remarque (Wqo plus faible)

Si $(S, \leqslant)$ est un wqo et que $\forall x, y \in S,\ x \leqslant y \Rightarrow x \leqslant' y$ alors $(S, \leqslant')$ est un wqo.

Outils

Théorème (Higman '52)

Soit $(S, \leqslant)$ *un wqo. Les suites finies sur* S *sont wqo pour* $\leqslant^\star$*.*

Outils

Théorème (Higman '52)

Soit $(S, \leqslant)$ un wqo. Les suites finies sur S sont wqo pour $\leqslant^{\star}$.

Théorème (Kruskal '60, Nash-Williams '63)

Les arbres sont wqo pour $\leqslant_m$.

Outils

Théorème (Higman '52)

Soit $(S, \leqslant)$ un wqo. Les suites finies sur S sont wqo pour $\leqslant^\star$.

Théorème (Kruskal '60, Nash-Williams '63)

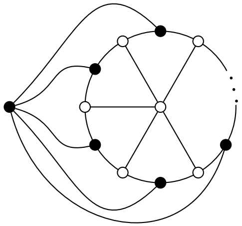
Les arbres sont wqo pour $\leqslant_m$.

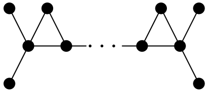
Théorème

Il suffit de savoir traiter le cas des graphes 2-connexes avec des étiquettes.

Relations d'inclusions

- Résultats positifs : mineur [GMXX] (conjecture de Wagner), immersion [GMXXIII] (Conjecture Nash-Williams) ;
- Résultats négatifs : sous-graphe (induit), contraction, mineur (topologique) induit, mineur topologique ;
- Problèmes ouverts : immersion induite et immersion forte.





Regardons des sous-classes

Définies en terme d'invariant de graphes

Théorème (Fellows, Hermelin, Rosamond '09)

- *Les graphes de feedback-vertex-set borné sont wqo pour les mineurs topologiques ;*
- *les graphes de vertex-cover borné sont wqo pour les sous-graphes ;*
- *les graphes de circonférence bornée sont wqo pour les mineurs induits.*

Regardons des sous-classes

Définies en terme d'invariant de graphes

Théorème (Fellows, Hermelin, Rosamond '09)

- *Les graphes de feedback-vertex-set borné sont wqo pour les mineurs topologiques ;*
- *les graphes de vertex-cover borné sont wqo pour les sous-graphes ;*
- *les graphes de circonférence bornée sont wqo pour les mineurs induits.*

...ou en terme de sous-structures interdites

Théorème (Thomas '85)

Les graphes sans K_4 en tant que mineur induit sont wqo pour les mineurs induits.

Regardons des sous-classes

Définies en terme d'invariant de graphes

Théorème (Fellows, Hermelin, Rosamond '09)

- *Les graphes de feedback-vertex-set borné sont wqo pour les mineurs topologiques ;*
- *les graphes de vertex-cover borné sont wqo pour les sous-graphes ;*
- *les graphes de circonférence bornée sont wqo pour les mineurs induits.*

...ou en terme de sous-structures interdites

Théorème (Thomas '85)

Les graphes sans K_4 en tant que mineur induit sont wqo pour les mineurs induits.

Théorème (Liu and Thomas '13+)

Les graphes sans  *comme mineurs topologiques sont wqo pour les mineurs topologiques.*

Théorèmes de dichotomie

(rappel : wqo $\equiv$ pas de suite infinie d'éléments non-comparable)

Pour une relation $\leqslant$, caractériser les graphes H tels que $(\mathrm{Excl}_{\leqslant}(H), \leqslant)$ est un wqo.

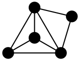
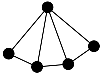
- [Damaschke, '90] : théorème de dichotomie pour les sous-graphes induits ;
- [Ding, '92] : théorème de dichotomie pour les sous-graphes.

Théorèmes de dichotomie

(rappel : wqo $\equiv$ pas de suite infinie d'éléments non-comparable)

Pour une relation $\leqslant$, caractériser les graphes H tels que $(\mathrm{Excl}_{\leqslant}(H), \leqslant)$ est un wqo.

- [Damaschke, '90] : théorème de dichotomie pour les sous-graphes induits ;
- [Ding, '92] : théorème de dichotomie pour les sous-graphes.

$H_3 =$  Gem $=$ 

Théorème (Błasiok, Kamiński, Raymond, T. '14+)

La classe des graphes sans H comme mineur induit est wqo pour les mineurs induits si et seulement si H est un mineur induit de Gem ou de H_3.

Principe de la preuve

Direction $(\mathrm{Excl}_{\leqslant_{m.i}}(H), \leqslant_{m.i})$ wqo $\Rightarrow$ $(H \leqslant_{m.i} \mathrm{Gem}$ ou $H \leqslant_{m.i} H_3)$.

Remarque

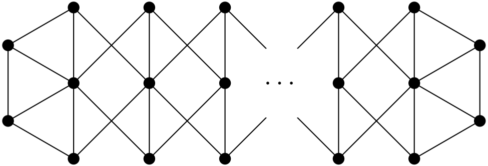
Si $\mathcal{S}$ est une antichaine infinie, H est un mineur induit pour un certain rang.

Principe de la preuve

Direction $(\mathrm{Excl}_{\leqslant_{m.i}}(H), \leqslant_{m.i})$ wqo $\Rightarrow$ $(H \leqslant_{m.i} \mathrm{Gem}$ ou $H \leqslant_{m.i} H_3)$.

Remarque

Si $\mathcal{S}$ est une antichaine infinie, H est un mineur induit pour un certain rang.



$\not\geqslant_{m.i} K_5, K_5^-$

[Matoušek, Nešetřil, Thomas '88]

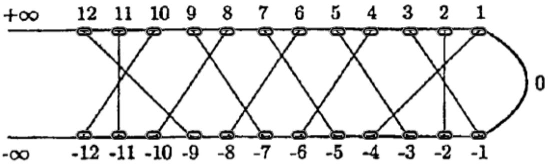
- $H \not\geqslant_{m.i} K_5, K_5^- \quad \rightsquigarrow \quad \overline{H} \not\geqslant_{m.i} 5 \cdot K_1$ et $\overline{H} \not\geqslant_{m.i} 3 \cdot K_1 + K_2$;

Principe de la preuve

Direction $(\mathrm{Excl}_{\leqslant_{m.i}}(H), \leqslant_{m.i})$ wqo $\Rightarrow$ $(H \leqslant_{m.i} \mathrm{Gem}$ ou $H \leqslant_{m.i} H_3)$.

Remarque

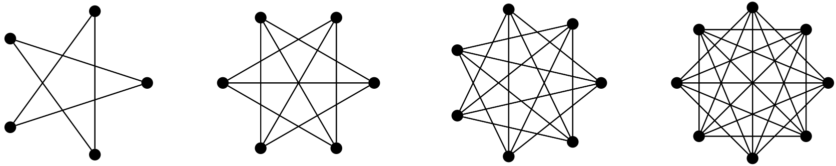
Si $\mathcal{S}$ est une antichaine infinie, H est un mineur induit pour un certain rang.



[Ding '98]

- $H \not\geqslant_{m.i} K_5, K_5^-$ $\rightsquigarrow$ $\overline{H} \not\geqslant_{m.i} 5 \cdot K_1$ et $\overline{H} \not\geqslant_{m.i} 3 \cdot K_1 + K_2$;
- $C_4 \not\geqslant_{m.i} H$ $\rightsquigarrow$ $\overline{H} \not\geqslant_{m.i} 2 \cdot K_2$.

Principe de la preuve

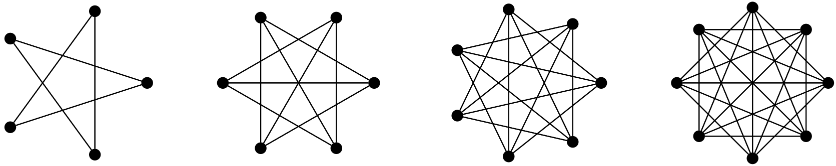


Antitrou

- $\overline{H}$ est une forêt linéaire.

en effet :

Principe de la preuve



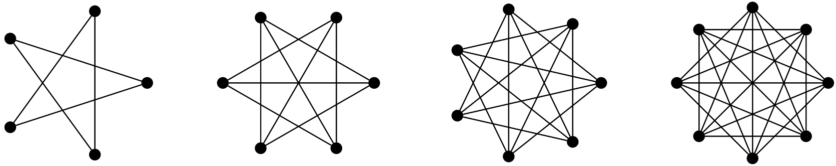
Antitrou

- $\overline{H}$ est une forêt linéaire.

en effet :

- Si $\overline{H}$ contient un trou, alors H contient un antitrou.

Principe de la preuve



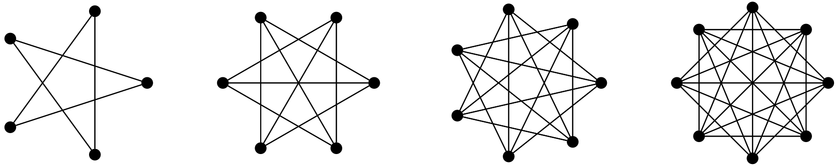
Antitrou

- $\overline{H}$ est une forêt linéaire.

en effet :

- Si $\overline{H}$ contient un trou, alors H contient un antitrou.
- ... les antitrou étant incomparable, H en "élimine" au plus un.

Principe de la preuve



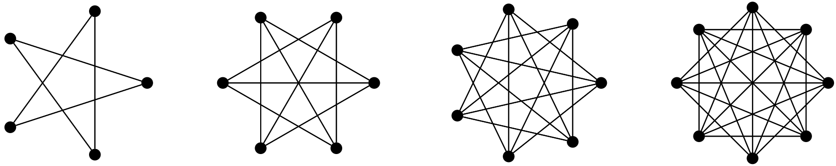
Antitrou

- $\overline{H}$ est une forêt linéaire.

en effet :

- Si $\overline{H}$ contient un trou, alors H contient un antitrou.
- ... les antitrou étant incomparable, H en "élimine" au plus un.
- Si $\overline{H}$ contient une griffe ($K_{1,3}$), alors H contient $K_1 + K_3$.

Principe de la preuve



Antitrou

- $\overline{H}$ est une forêt linéaire.

en effet :

- Si $\overline{H}$ contient un trou, alors H contient un antitrou.
- ... les antitrou étant incomparable, H en "élimine" au plus un.
- Si $\overline{H}$ contient une griffe ($K_{1,3}$), alors H contient $K_1 + K_3$.
- ... il n'y a pas de sommets non-adjacents à plus de 2 autres sommets dans un antitrou.

Principe de la preuve

- $\color{magenta}{H} \not\geqslant_{m.i} K_5, K_5^- \quad \rightsquigarrow \quad \overline{\color{magenta}{H}} \not\geqslant_{m.i} 5 \cdot K_1$ et $\overline{\color{magenta}{H}} \not\geqslant_{m.i} 3 \cdot K_1 + K_2$;
- $\overline{\color{magenta}{H}}$ est une forêt linéaire ;
- $C_4 \not\geqslant_{m.i} \color{magenta}{H} \quad \rightsquigarrow \quad \overline{\color{magenta}{H}} \not\geqslant_{m.i} 2 \cdot K_2$.

Principe de la preuve

- $\color{magenta}{H} \not\geqslant_{m.i} K_5, K_5^-$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ $\overline{H} \not\geqslant_{m.i} 5 \cdot K_1$ et $\overline{H} \not\geqslant_{m.i} 3 \cdot K_1 + K_2$;
- $\overline{H}$ est une forêt linéaire ;
- $C_4 \not\geqslant_{m.i} H$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ $\overline{H} \not\geqslant_{m.i} 2 \cdot K_2$.

Tester tous les cas pour $\overline{H}$ ($\leqslant 4$ composantes connexes $\leqslant 5$ sommets) :

Principe de la preuve

- $H \not\geqslant_{m.i} K_5, K_5^-$ $\rightsquigarrow$ $\overline{H} \not\geqslant_{m.i} 5 \cdot K_1$ et $\overline{H} \not\geqslant_{m.i} 3 \cdot K_1 + K_2$;
- $\overline{H}$ est une forêt linéaire ;
- $C_4 \not\geqslant_{m.i} H$ $\rightsquigarrow$ $\overline{H} \not\geqslant_{m.i} 2 \cdot K_2$.

Tester tous les cas pour $\overline{H}$ ($\leqslant 4$ composantes connexes $\leqslant 5$ sommets) :

$n \backslash c$	1	2	3	4
1	K_1			
2	K_2	$2 \cdot K_1$		
3	P_3	$K_2 + K_1$	$3 \cdot K_1$	
4	P_4	$P_3 + K_1$	$K_2 + 2 \cdot K_1$	$4 \cdot K_1$
5		$P_4 + K_1$	$P_3 + 2 \cdot K_1$	
6				

Table: Graphes $\overline{H}$' possibles

tous les graphes possibles H sont des mineurs induits de Gem ou H_3.

Principe de la preuve

- $H \not\geqslant_{m.i} K_5, K_5^-$ $\rightsquigarrow$ $\overline{H} \not\geqslant_{m.i} 5 \cdot K_1$ et $\overline{H} \not\geqslant_{m.i} 3 \cdot K_1 + K_2$;
- $\overline{H}$ est une forêt linéaire ;
- $C_4 \not\geqslant_{m.i} H$ $\rightsquigarrow$ $\overline{H} \not\geqslant_{m.i} 2 \cdot K_2$.

Tester tous les cas pour $\overline{H}$ ($\leqslant 4$ composantes connexes $\leqslant 5$ sommets) :

$n \backslash c$	1	2	3	4
1	K_1			
2	$2 \cdot K_1$	K_2		
3	$K_2 + K_1$	P_3	K_3	
4	P_4	H_1	H_2	K_4
5		Gem	H_3	
6				

Table: Graphes H possibles

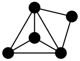
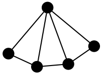
tous les graphes possibles H sont des mineurs induits de Gem ou H_3.

Principe de la preuve

Direction ($H \leqslant_{m.i}$ Gem or $H \leqslant_{m.i} H_3$) $\Rightarrow$ ($\mathrm{Excl}_{\leqslant_{m.i}}(H), \leqslant_{m.i}$) wqo.

Principe de la preuve

Direction ($H \leqslant_{m.i} \mathrm{Gem}$ or $H \leqslant_{m.i} H_3$) $\Rightarrow$ ($\mathrm{Excl}_{\leqslant_{m.i}}(H), \leqslant_{m.i}$) wqo.

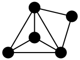
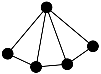
$H_3 =$  $\mathrm{Gem} =$ 

Théorème (Błasiok, Kamiński, Raymond, T. '14+)

- ($\mathrm{Excl}_{\leqslant_{m.i}}(H_3), \leqslant_{m.i}$) *est un wqo ;*
- ($\mathrm{Excl}_{\leqslant_{m.i}}(Gem), \leqslant_{m.i}$) *est un wqo.*

Principe de la preuve

Direction ($H \leqslant_{m.i} \mathrm{Gem}$ or $H \leqslant_{m.i} H_3$) $\Rightarrow$ ($\mathrm{Excl}_{\leqslant_{m.i}}(H), \leqslant_{m.i}$) wqo.

$H_3 =$  $\mathrm{Gem} =$ 

Théorème (Błasiok, Kamiński, Raymond, T. '14+)

- ($\mathrm{Excl}_{\leqslant_{m.i}}(H_3), \leqslant_{m.i}$) *est un wqo ;*
- ($\mathrm{Excl}_{\leqslant_{m.i}}(Gem), \leqslant_{m.i}$) *est un wqo.*

Preuve ?

Prouver le wqo

Comment prouver que c'est wqo ?

(1) Théorème de décomposition $\rightarrow$ structure ;

(2) Encoder chaque graphe G comme une chaine s_G ;

(3) Montrer que $s_H \preceq s_G \Rightarrow H \leqslant_{m.i} G$;

(4) Prouver que les chaines sont wqo ($\sim$ Higman) ;

Décomposition

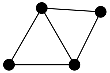
Théorème (Błasiok, Kamiński, Raymond, T. '14+)

Théorème de décomposition pour les graphes de $\mathrm{Excl}_{\leqslant_{m.i}}(H_3) \setminus \mathrm{Excl}_{\leqslant_{m.i}}(K_4)$ *: cycle + multiparti complet .*

Théorème (Błasiok, Kamiński, Raymond, T. '14+)

Théorème de décomposition pour les graphes de $\mathrm{Excl}_{\leqslant_{m.i}}(Gem) \setminus \mathrm{Excl}_{\leqslant_{m.i}}(K_4)$ *: structure arborescente.*

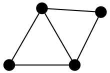
Un cas facile

$H_2 =$ 

Théorème

Si G est un graphe 2-connexe sans H_2 en temps que contraction (ou mineur induit) alors G est une clique ou un cycle.

Un cas facile

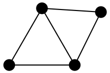
$H_2 =$ 

Théorème

Si G est un graphe 2-connexe sans H_2 en temps que contraction (ou mineur induit) alors G est une clique ou un cycle.

- S'il n'y a pas de non arête, c'est une clique.

Un cas facile

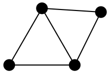
$H_2 =$ 

Théorème

Si G est un graphe 2-connexe sans H_2 en temps que contraction (ou mineur induit) alors G est une clique ou un cycle.

- S'il n'y a pas de non arête, c'est une clique.
- On prend u, v non-adjacents, et P_1, P_2 deux plus court chemins de u à v.

Un cas facile

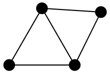
$H_2 =$ 

Théorème

Si G est un graphe 2-connexe sans H_2 en temps que contraction (ou mineur induit) alors G est une clique ou un cycle.

- S'il n'y a pas de non arête, c'est une clique.
- On prend u, v non-adjacents, et P_1, P_2 deux plus court chemins de u à v.
- S'il y a une corde entre P_1 et P_2, on les contracte.

Un cas facile

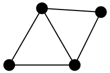
$H_2 =$ 

Théorème

Si G est un graphe 2-connexe sans H_2 en temps que contraction (ou mineur induit) alors G est une clique ou un cycle.

- S'il n'y a pas de non arête, c'est une clique.
- On prend u, v non-adjacents, et P_1, P_2 deux plus court chemins de u à v.
- S'il y a une corde entre P_1 et P_2, on les contracte.
- S'il n'y a pas d'autres sommets, c'est un cycle.

Un cas facile

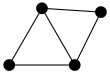
$$H_2 = $$ 

Théorème

Si G est un graphe 2-connexe sans H_2 en temps que contraction (ou mineur induit) alors G est une clique ou un cycle.

- S'il n'y a pas de non arête, c'est une clique.
- On prend u, v non-adjacents, et P_1, P_2 deux plus court chemins de u à v.
- S'il y a une corde entre P_1 et P_2, on les contracte.
- S'il n'y a pas d'autres sommets, c'est un cycle.
- On contracte les autres composantes connexes en un point qui a au moins deux voisins sur le cycle.

Un cas facile

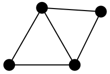
$H_2 =$ 

Théorème

Si G est un graphe 2-connexe sans H_2 en temps que contraction (ou mineur induit) alors G est une clique ou un cycle.

- S'il n'y a pas de non arête, c'est une clique.
- On prend u, v non-adjacents, et P_1, P_2 deux plus court chemins de u à v.
- S'il y a une corde entre P_1 et P_2, on les contracte.
- S'il n'y a pas d'autres sommets, c'est un cycle.
- On contracte les autres composantes connexes en un point qui a au moins deux voisins sur le cycle.
- On a alors H_2, et on peut contracter les sommets restants sur les sommets dominants.

Un cas facile

$H_2 =$ 

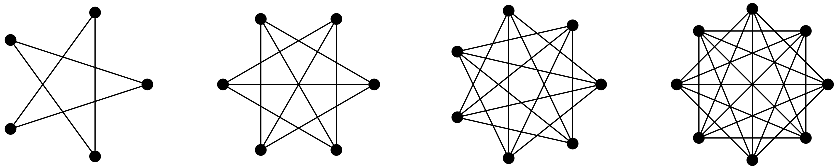
Théorème

Si G est un graphe 2-connexe sans H_2 en temps que contraction (ou mineur induit) alors G est une clique ou un cycle.

Théorème

Les graphes sans H_2 comme contraction (mineur induit) sont wqo pour les contractions et donc wqo pour les mineurs induits.

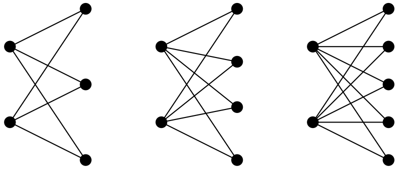
Une dichotomie pour les contractions



Antitrou

- $\overline{H}$ est une forêt linéaire.

Une dichotomie pour les contractions



$K_{2,r}$

- $\overline{H}$ est une forêt linéaire.
- H est un split complet et son coté clique est de taille au plus deux.

Une dichotomie pour les contractions

- $\overline{H}$ est une forêt linéaire.
- H est un split complet et son coté clique est de taille au plus deux.
- Il ne faut que regarder le cas des graphes sans Gem en tant que contraction.

The end

Théorème (Błasiok, Kamiński, Raymond, T. '14+)

La classe des graphes sans H *comme mineur induit est wqo pour les mineurs si et seulement si* H *est un mineur induit de Gem ou de* H_3.

Théorème (Błasiok, Kamiński, Raymond, T. '14+)

Théorème de décomposition pour les graphes de :

- $\mathrm{Excl}_{\leqslant_{m.i}}(H_3) \setminus \mathrm{Excl}_{\leqslant_{m.i}}(K_4)$ *: cycle + multiparti ;*
- $\mathrm{Excl}_{\leqslant_{m.i}}(Gem) \setminus \mathrm{Excl}_{\leqslant_{m.i}}(K_4)$ *: structure arborescente.*

The end

Encore à faire :

- dichotomie pour les contractions (✓) ;
- antichaines canoniques ;
- immersions induites et immersions fortes (dur).

Merci !